Transformée de Fourier 1D

$f(x)$ est une fonction périodique de période T connue en N points $x_n = \frac{n}{N} T$ avec $0 \leq n \leq N-1$

$f(x)$ peut être interpolée par la série de Fourier

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{K} a_k \cos\left(\frac{2\pi}{T} k x\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi}{T} k x\right)$$

avec
$$a_k = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(x_n) \cos\left(k \, 2\pi \frac{n}{N}\right)$$

$$b_k = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(x_n) \sin\left(k \, 2\pi \frac{n}{N}\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(x_n)$$

Dans l'ensemble complexe

$$f(x) = \sum_{k=-K}^{K} c_k \, e^{i k \frac{2\pi}{T} x}$$

avec $c_0 = a_0$

$$\left.\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2}(a_k - i b_k) \\ c_{-k} &= \frac{1}{2}(a_k + i b_k) \end{aligned}\right\} \forall k \geq 1$$

soit
$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(x_n) \, e^{-i k 2\pi \frac{n}{N}} \qquad \forall -K \leq k \leq$$

Série de Fourier en 2D

$f(x,y)$ est une fonction périodique de périodes T_x et T_y respectivement suivant x et y

$f(x,y)$ est connue sur une grille régulière de $N \times M$ points

$$x_n = \frac{n}{N} T_x \quad \text{et} \quad y_m = \frac{m}{M} T_y \quad \text{avec } 0 \leq n \leq N-1,\ 0 \leq m \leq M-1$$

$$f(x,y) = \sum_{k=-K}^{K} \sum_{l=-L}^{L} F_{kl}\, e^{i 2\pi \left(k \frac{x}{T_x} + l \frac{y}{T_y}\right)}$$

$$\text{avec } F_{kl} = \frac{1}{NM} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} f(x_n, y_n)\, e^{-i 2\pi \left(k \frac{n}{N} + l \frac{m}{M}\right)}$$

avec des vecteurs de périodicité non nécessairement orthogonaux $\vec{a_1}$ et $\vec{a_2}$

$f(\vec{r})$ connue sur une grille régulière

$$\vec{r}_{nm} = \frac{n}{N} \vec{a_1} + \frac{m}{M} \vec{a_2} \qquad 0 \leq n \leq N-1,\ 0 \leq m \leq M-1$$

On définit les vecteurs réciproques $\vec{b_1}$ et $\vec{b_2}$ tels que

$$\vec{a_i} \cdot \vec{b_j} = \delta_{ij}$$

$$\text{donc} \quad n = N\, \vec{r}_{nm} \cdot \vec{a_1}$$

$$m = M\, \vec{r}_{nm} \cdot \vec{a_2}$$

$$f(x,y) = \sum_{k=-K}^{K} \sum_{l=-L}^{L} F_{kl}\, e^{i 2\pi \left(k\, \vec{r} \cdot \vec{b_1} + l\, \vec{r} \cdot \vec{b_2}\right)}$$

$$\text{avec } \vec{r} = (x,y)$$

On peut réécrire les séries dans l'ensemble des réels

$$f(x,y) = a_0 + \sum_{k=1}^{K} \sum_{l=1}^{L} a_{kl} \cos[2\pi k \vec{r}\cdot\vec{a}_1) \cos(2\pi l \vec{r}\cdot\vec{a}_2$$
$$+ b_{kl} \cos(2\pi k \vec{r}\cdot\vec{a}_1) \sin(2\pi l \vec{r}\cdot\vec{a}_2$$
$$+ c_{kl} \sin(2\pi k \vec{r}\cdot\vec{a}_1) \cos(2\pi l \vec{r}\cdot$$
$$+ d_{kl} \sin(2\pi k \vec{r}\cdot\vec{a}_1) \sin(2\pi l \vec{r}\cdot\vec{a}_2$$

avec $a_0 = \frac{1}{NM} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} f(x_n, y_n)$

$$\begin{cases} a_{kl} = F_{kl} + F_{-kl} + F_{k-l} + F_{-k-l} \\ b_{kl} = i\,(F_{kl} + F_{-kl} - F_{k-l} - F_{-k-l}) \\ c_{kl} = i\,(F_{kl} - F_{-kl} + F_{k-l} - F_{-k-l}) \\ d_{kl} = -(F_{kl} - F_{-kl} - F_{k-l} + F_{-k-l}) \end{cases} \quad \forall\ k, l \geq 1$$

soit $a_{kl} = \frac{4}{NM} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} f(x_n, y_n) \cos\left(2\pi k \frac{n}{N}\right) \cos\left(2\pi l \frac{m}{M}\right)$

$$b_{kl} = \frac{4}{NM} \sum_{n} \sum_{m} f(x_n, y_n) \cos\left(2\pi k \frac{n}{N}\right) \sin\left(2\pi l \frac{m}{M}\right.$$

$$c_{kl} = \frac{4}{NM} \sum_{n} \sum_{m} f(x_n, y_n) \sin\left(2\pi k \frac{n}{N}\right) \cos\left(2\pi l \frac{m}{M}\right.$$

$$d_{kl} = \frac{4}{NM} \sum_{n} \sum_{m} f(x_n, y_n) \sin\left(2\pi k \frac{n}{N}\right) \sin\left(2\pi l \frac{m}{M}\right.$$